Пут и саобраћај
Journal of Road and Traffic Engineering

www.putisaobracaj.rs

Aplikacije matrica u transportu

Dragan Radovanović

OŠ "Vuk Karadžić", Sočanica, Srbija

PODACI O RADU

DOI: 10.31075/PIS.69.03.07
Stručni rad
Primljen: 14.08.2023.
Prihvaćen: 29.08.2023.
Korespondent autor:
draganr29@gmail.com

Ključne reći:

Matrice
Transportni lanac
Slaganje tereta
Izbor varijanti

REZIME

Matrično se može prikazati delovanje linearnih operatora, tako da je, sisteme jednačina sa velikim brojem nepoznatih najpogodnije zapisati u matričnoj formi. U daljem tekstu, biće navedene osnovne operacije sa matricama, ukazaće se na postojeće kompjuterske alate u operacijama sa matricama i na kraju će biti dati neki praktični problemi iz transporta koji se mogu rešavati matricama. Na osnovu tehno-ekonomske analize generišu se najbolje varijante transportnih lanaca koje bi trebalo da znaju pošiljaoci i primaoci. Broj kombinacija može biti značaj pri čemu se matricama mogu odrediti najpovoljnije varijante. Osnovni problemi u optimizaciji slaganja komadnih tereta (robe) na nosače, jesu pojavni oblik i mase na mestima početno-završnih operacija koji su u većini slučajeva stohastičke veličine i raspored masa opterećenja u statičkom i dinamičkom smislu.

1. Uvod

U naučnim ili praktičnim istraživanjima, linearna algebra je nezaobilazan alat, bilo da se radi o saobraćaju i transportu, električnim kolima, genetici, kriptografiji ili nekoj drugoj oblasti. Prisustvo linearnih veza između veličina od interesa, predstavlja osnovu za primenu jezika linearne algebre i metoda zasnovanih na njoj. Pored direktnih praktičnih primena u konkretnim domenima, rešavanje problema linearne algebre, poput inverzije matrice, predstavlja nezaobilazan deo raznorodnih matematičkih metoda. Glavni problemi numeričke linearne algebre su rešavanje sistema jednačina, inverzija matrica, dekompozicija matrica i izračunavanje sopstvenih vektora i sopstvenih vrednosti matrica. Pomenuti problemi su međusobno vrlo povezani, zbog čega matrice imaju važnu ulogu. Danas, za numeričko rešavanje inženjerskih i naučnih problema postoji značajan broj šire poznatih i korišćenih kompjuterskih alata: komercijalnih softvera (Excel, Mathlab, Mathematica, Mathcad, Maple), kalkulatora matrica, android aplikacija i raznih kompjuterskih sistema iz oblasti matematike, a posebno iz oblasti algebre (Wolfram Alpha). Korišćenje navedenih specijalizovanih softvera zahteva prethodno poznavanje njihovih mogućnosti uz formiranje određenih matematičko-ekonomskih modela kojima se može okarakterisati određena pojava u saobraćaju i transportu.

U ovom radu, odabrana su dva slučaja: izbor transportnog lanca od mogućih varijanti i rešavanje optimalnog rasporeda tereta na površini nosača sa njegovim zapreminskim korišćenjem i iskorišćenjem nosivosti.

2. Operacije i kompjutersko rešavanje matrica

Pojam matrice ima široko značenje, od muzičkih matrica kod komponovanja, životnih matrica ponašanja ljudi, korelacionih matrica kod optimizacije geodetskih mreža, konstrukcija reda vožnje, preko ekonomskih modela nacionalnog dohotka i dr. Međutim, u matematici matrice predstavljaju "šemu", odnosno način prikazivanja nekih ,,veličina" koje su opisane konačnim ili beskonačnim nizom realnih brojeva (na primer, a_1, a_2, …, a_n) ili pak nekom pravougaonom šemom brojeva, oblika (Jednačina 1.):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix} \tag{1}$$

u kojoj se pojavljuje *m* vrsta (redova) i *n* kolona (stupaca). Ponekad, broj vrsta i kolona ne mora biti konačan. Po svom obliku, mogu biti: kvadratna, nula matrica, dijagonalna, jedinična, trouglasta, transponovana, simetrična, asimetrična i singularna matrica, pri čemu svaka od njih ima svoje specifičnosti.

Kod operacija sa matricama najvažnije je prvo odrediti dimenzije matrica i sprovesti neke od operacija (sabiranje, množenje skalarom, množenje matrica).
Kod sabiranja i množenja matrica važno je svojstvo asocijativnosti, gde je važi jednakost: A + (B + C) = (A + B) + C i A(BC) = (AB)C, pod uslovom da naznačene operacije imaju smisla. Operacija sabiranja je kumulativna, tj. A + B = B + A. Međutim, množenje dve matrice nije kumulativno, A(BC) = (AB)C, A(B + C) = AB + AC; (A + B)C = AC + BC i λ(AB) = (λA)B = A(λB) i IA = A, AI = A. Pre svega, ako postoji proizvod AB, ne mora postojati proizvod BA. Čak i u slučajevima kada postoje AB i BA (na primer, kada su matrice istog reda), u opštem slučaju je AB ≠ BA. Imajući ovako definisane operacije sa matricama, skup matrica se može posmatrati kao neka algebarska struktura [1].

Jedna od važnih tema u numeričkoj linearnoj algebri je da treba koristiti prednosti svake specijalne strukture matrice u raznim izračunavanjima, kada god za to postoji mogućnost. Kako je pozitivna definitivnost prvi pojam pozitivnosti matrica koji se razvijao, potrebno je upoznati se Hermitskim (simetričnim) pozitivno određenim matricama (u oznaci Hn), koje se prirodno javljaju u različitim primenama, od rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina do obrade slika. Posebnu klasu matrica čine P-Matrice, odnosno kvadratne matrice, kada su svi njeni minori pozitivni. Postoje još i B-matrice, koje predstavljaju realne kvadratne matrice A, sa pozitivnim sumama po vrstama, a kod kojih su svi van-dijagonalni elementi ograničeni odgovarajućim sumama po vrstama, tj. za svako i;j = 1; …, n. Ova klasa matrica su regularne i imaju pozitivnu determinantu. Istoj klasi pripadaju i C-matrice. To su realne kvadratne matrice A, sa pozitivnim sumama po vrstama, gde su svi van-dijagonalni elementi veći od odgovarajućih suma po vrstama, tj. za svako i;j = 1,….. n. Od posebnog značaja su i M-Matrice [2], koje imaju pozitivne dijagonalne elemente, za koje se može pokazati da se čitave lokalizovane oblasti njihovih karakterističnih korena nalaze u desnoj polu-ravni. Ima i drugih klasa matrica koje nisu M-matrice jer ne pokrivaju sve slučajeve iz prakse.

Poslednjih decenija, postoji značajan broj šire poznatih i korišćenih kompjuterskih alata za numeričko rešavanje inženjerskih i naučnih problema: komercijalni softveri (Excel, Mathlab, Mathematica, Mathcad, Maple), kalkulatori matrica, android aplikacije i razni kompjuterski sistemi iz oblasti matematike, a posebno iz oblasti algebre (Wolfram Alpha). Excel, kao deo Microsoft Office, predstavlja računsku tabelu (eng. spreadsheet) koja omogućava razne proračune sa podacima raspoređenim u redovima i kolonama. Excel poseduje i veliki broj ugrađenih algoritama, kao što su statistički testovi, deskriptivna statistika, Fourierova analiza, regresija, i dr. Matlab je integrisani programski paket koji se koristi za razvoj algoritama, vizuelizaciju podataka, analizu podataka i numeričke proračune, za koje je prvenstveno namenjen.

Neki od problema mogu se brže rešiti u poređenju sa tradicionalnim programskim jezicima, kao što su C i C++, jer se ne moraju deklarisati promenljive, određivati tipovi promenljivih, rezervisati memorija i dr.

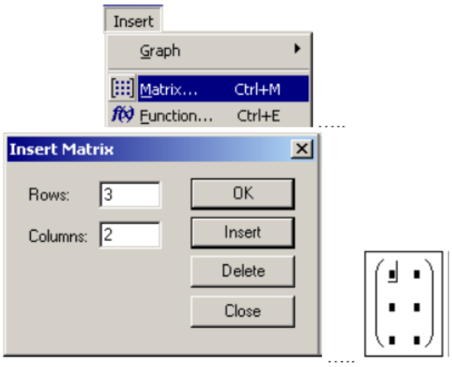
U Matlabu postoje ugrađene pogodnosti tradicionalnih programskih jezika (kontrola toka, strukture podataka, objektno-orijentisano programiranje… itd). Dodatno, u Matlabu komande se izvršavaju bez kompajliranja. Osnovni tip podataka sa kojima Matlab radi su matrice, odnosno vektori. Matlab je moguće integrisati sa drugim programskim jezicima i aplikacijama. Matlab ima veliki broj ugrađenih funkcija (help elfun) gde svaka funkcija kao argument ima mogućnost da upravlja matricom: exp(x)…e(x), log(x)…ln(x) prirodni logaritam, log10(x)…logaritam sa bazom 10, abs(x)…apsolutna vrednost, sqrt(x)…kvadratni koren, round(x)…zaokruži x na najbliži ceo broj, ceil(x)… zaokruživanje ka većem celom broju, floor(x)…zaokruživanje ka manjem celom broju, i dr.

Mathematica (Wolfram Mathematica), jedan od vodećih simboličkih matematičkih softvera, koji se ponekad naziva programom računarske algebre, a koristi se u mnogim naučnim, inženjerskim, matematičkim i računarskim poljima. Slično, Maple 6 predstavlja sistem s integrisanim numeričkim i simboličkim računanjem. Ovaj softver obuhvata najveću kolekciju algoritma u jednom sistemu, koji mogu da rade u mnogobrojnim oblastima numeričkog, grafičkog ili simboličkog računanja. Volfram Language je programski jezik koji se koristi u *Mathematici*.

Softver uključuje dinamičku interaktivnost, visoko produktivnu adaptivnu vizualizaciju, simboličku konstrukciju interfejsa, opterećene podatke na određen zahtev, obradu slike i zvuka, neuronske mreže, 3D štampanje i alate za povezivanje na DLL, SKL, Java, .NET, C ++ , Fortran, CUDA, OpenCL i http. MathCAD je softver za inženjerske proračune koji pruža značajne prednosti kod razvoja i dizajniranja inženjerskih projekata. Za razliku od drugih softvera koji se mogu koristiti u inženjerskim proračunima, MathCAD omogućava inženjerima da istovremeno dizajniraju i dokumentuju proračune sa savremenim funkcionalnim i dinamičkim kalkulacijama koje uzimaju u obzir i merne jedinice.

Ovaj paket sadrži veliki broj ugrađenih algoritama (funkcija) koji se mogu koristiti u numeričkoj analizi, ali korisnik može da programira svoje algoritme u veoma moćnom programskom modulu. U Mathcad-u susreće se definicija za vektor ili matricu kao niz, i u izvesnom smislu predstavlja opštu definiciju uređenih podataka pravougaonog rasporeda.

Prema [3], potrebno je postaviti kursor na mestu gde se želi formirati region blanko matrice. Matrica se kreira na osnovu komande iz menija *Insert m Matrix* ili prečicom: Ctrl+M (Slika 1).

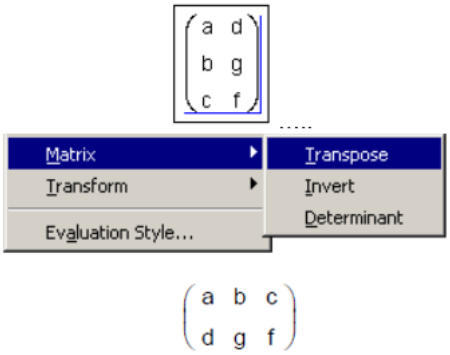


Slika 1. Postupak formiranja blanko matrice

Iz dobijenog dijalog-boksa *Insert Matrix* bira se broj kolona (Columns:) i redova (Rows:) od kojih će biti sastavljena matrica. Unesena vrednosti za *Rows*: je 3, a za *Columns* je 2. Posle podešavanja dimenzije matrice (3x2) pojavljuje se njen region, sa 2x3=6 *placeholder*-a koje treba popuniti. Ispunjavanjem praznih mesta formirana je matrica brojeva 2x3. Elementi matrice su najčešće brojevi ali mogu biti matematički izrazi, sintakse, stringovi, a ponekad i komande. Sa formiranom matricom potrebno je poznavati uslove koji su potrebni u postupcima numeričkog i/ili simboličkog procesuiranja. U tom smislu može se vršiti:

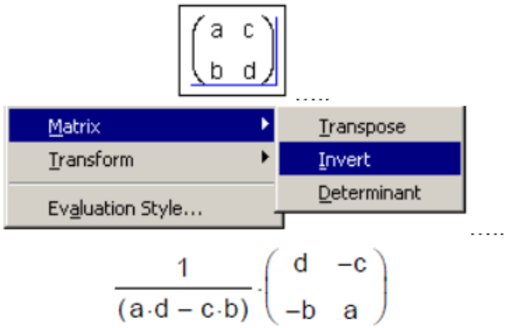
- umetanje novih redova i kolona u matrici, i njihovo brisanje, u dijalogu *Insert Matrix*,
- transponovanje, invertovane i determinanta matrice, i još dosta toga.

Transpozicija definisane matrice izvodi se odgovarajućim selektovanjem, a zatim primenom komande iz menija *Symbolics m Matrix m Transpose*, (Slika 2).



Slika 2. Postupak dobijanja transponovane matrice

Inverzna matrica se dobija selektovanjem originalne komande, ili one komande iz menija *Symbolics m Matrix m Invert* (Slika 3). Operacija invertovanja može se vršiti samo nad kvadratnom matricom.



Slika 3. Postupak dobijanja inverzivne matrice

Mathcad sadrži veći broj binarnih operatora i odgovarajućih funkcija u domenu vektorske, odnosno matrične algebre. Iz palete *Math*, za proračun i analizu aktivira se, kao što je navedeno, posebna paleta *Matrix*. Ovom paletom ikonica moguće je: kreirati matricu (*Matrix and Vector Ctrl+M*), izračunati determinantu matrice (*Determinant*), primeniti binarnu operaciju vektorizacije (*Vectorise Ctrl+*), naći skalarni proizvod vektora (*Dot Product **), izračunati vektorski proizvod vektora (*Cross Product Ctrl +8*) i izračunati sumu elemenata u vektoru (*Vector Sum Ctrl+4*). Tu su još i operacije: izdvajanje izabrane kolone matrice (*Matrix Column Ctrl+6*), navedeno transponovanje matrice (*Matrix Transpose Ctrl+1*) i kreiranje ili uvoz rasterskih slika koje su definisane matrično (*Picture Ctrl+T*). Za rešavanje sistema jednačina, pored funkcije *Find*, mogu se primeniti i funkcije *Isolve(M,v)*, pretraživanja i upoređivanje matrica, putem funkcija*: lookup*, *hlookup*, *vlookup*, koje omogućavaju korisnicima da nađu vrednosti u vektorima ili matricama, po horizontali i vertikali i vrate odgovarajuće vrednosti reda ili kolone u iste ili druge vektore ili matrice. Funkcija *match* pronalazi položaj vrednosti u jednom redu (koloni). Postoje i mnoge druge funkcije vezane za rad sa vektorima i matricama.

Maple predstavlja više-namenski matematički softverski alat visokog kvaliteta s potpuno integrisanim numeričkim i simboličkim računanjem. Sve funkcije softvera su pristupačne iz *WYSIWYG* tehničkog okruženja, a matematički izrazi se ispisuju u prirodnoj notaciji. Uz sve to, tu su i *state-of-the-art* grafike, animacije s potpunom kontrolom *editovanja* i razne prezentacije. Međutim, ovde nisu navedeni svi softveri koji se odnose na numeričko rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, odnosno softveri zasnovani na metodama poput metode konačnih elemenata, metode konačnih volumena i dr., jer se retko izučavaju. Pored specijalizovanih matematičkih softvera, često se koriste kompjuterski sistemi, za razliku od pretraživača izbacuju listu dokumenata i stranica koje daju direktne odgovore na konkretna pitanja, a uz pomoć ogromne baze podataka, algoritama i hiljade smeštenih procesora u kompjuterskim specijalizovanim centrima. Jedan od najznačajnijih je *WolframAlpha* (označen i *Wolfram Alpha*).

Korisnici upisuju svoja pitanja iz matematike, najčešće zadatke, a softver prikazuje rezultate, uz vizuelizaciju iz svoje baze podataka koristeći se raznim algoritmima. U osnovi se nalazi softver *Mathematica*, koji sadrži računarsku algebru, znakovne i numeričke proračune, vizuelizaciju (crtanje grafika funkcija) i statističke proračune. U poslednje vreme, pojavio sa *Wolfram Alpha PRO*, kao poboljšana verzija *Wolfram Alpha*, u koji se mogu prenositi svoji podaci i slike za analizu, radi dobijanja prilagođenih i interaktivnih prikaza za prezentacije i preuzimanje podataka. Ova unapređena verzija ostavlja više vremena za računanje, pristupe optimizovanim Veb aplikacijama i dr.

Kalkulatori matrica, predstavljaju mobilni uređaji i tableti, koji ne moraju da služe samo za zabavu i komunikaciju, već i za učenje. Štaviše, određene aplikacije se mogu koristiti za rešavanja i analizu zadataka iz matematike, ne samo jednostavnih već i nekih složenijih matematičkih jednačina. Takvi kalkulatori su: *Yhomework–MathSolver*, *PhotoMathPhotoway* i *MathWay*, koji za razliku od prethodne dve aplikacije radi sa naprednijim jednačinama, ali prikazuje samo konačan rezultat. Ako želite da vidite sve korake postupno obrađene, mora se koristiti vrlo funkcionalan, *Matrix Calculator* (Slika 4). On omogućava izračunavanje determinante matrice, sabiranje, transponovanje, oduzimanje matrica ili rad sa inverznom matricom i dr.

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ -3+2i & 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 2.4 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2*\frac{2}{3}+1.5*2.4 & 2*(-1)+1\frac{1}{2}*\frac{1}{2}i \\ (-3+2i)*\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}*2\frac{2}{5} & (-3+2i)*(-1)+2\frac{1}{2}*\frac{1}{2}i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\frac{14}{15} & -2+\frac{3}{4}i \\ 4+1\frac{1}{3}i & 3-\frac{3}{4}i \end{pmatrix} = C$$

$$C = \begin{pmatrix} 4\frac{14}{15} & -2+\frac{3}{4}i \\ 4+1\frac{1}{3}i & 3-\frac{3}{4}i \end{pmatrix}$$

Slika 4. Prikaz množenja matrica u *Matrix Calculator*

Još jedan kalkulator je značajan zbog svoji mogućnosti u radu sa matricama - *Maxima*, koji omogućava manipulaciju simboličkih i numeričkih izraza, uključujući i diferenciranje, integraciju *Taylor* serije, Laplasove transformacije diferencijalnih jednačina, sisteme linearnih jednačina, polinome, vektore, matrice uz visoku preciznost numeričkih rezultata u 2D i/ili 3D okruženju.

3. Primeri primena matrica u transportu

U određenom vremenskom trenutku, pri izučavanju ponašanja nekog ekonomskog modela posmatraju se varijable koje nam karakterišu model i uočava se njihova međuzavisnost.

Na primer, ukoliko posmatramo neki od modela sticanja dohotka, varijable koje posmatramo mogu biti nacionalni dohodak, investicije, troškovi, količina potrošnje, ukupni porezi, stopa poreza na dohodak i dr. Takođe, u transportu, ukoliko posmatramo izbor transportnog lanca u lancima snabdevanja, postoji veliki broj varijabli kao što su troškovi po vidovima prevoza, vrste u tipovi angažovanih sredstava, vrste i tipovi pretovarnih sredstava, tarife, troškovi sredstava rada i dr. Nešto složeniji slučaj je izbor optimalne varijante slaganja tereta (robe) na nosače koje direktno utiče na statičko i dinamičko iskorišćenje vozila, a time i na troškove poslovanja.

Na osnovu empirijskih proučavanja i ekonomskih pretpostavki modela veza između varijabli iskazuje se jednačinama veze. Za jednačine veze možemo pretpostaviti da su linearne, jer se određenim matematičkim metodama mogu (za date okvirne vrednosti varijabli) linearizovati. Na taj način model je okarakterisan sistemom linearnih jednačina. Rešenje tog sistema linearnih jednačina je tzv. "Ekvilibrijum" ili ravnotežni položaj modela. On je predstavljen onim vrednostima varijabli u kojima model ne teži ka promeni. Odrediti ekvilibrijum modela znači rešiti sistem linearnih jednačina, a to se čini upravo metodama linearne algebre što će biti prikazano na dva primera iz prakse. Treba napomenuti, da se linearna algebra koristi za ispitivanje tzv. "Stacionarnog ponašanja tehnološko-ekonomskog modela", tj. ponašanja u fiksiranom trenutku vremena, dok se za ispitivanje dinamike modela (tj. promene modela u toku vremena) koristi diferencijalni, integralni račun, simulacija, veštačka inteligencija (AI), mašinsko učenje (ML) i dr.

3.1. Izbor transportnog lanca

Tehnološko-ekonomska analiza varijantnih kombinacija u savremenim tehnologijama je značajna karakteristika celog transportnog procesa. Na osnovu tehnološko-ekonomske analize generišu se najbolje varijante transportnih lanaca koje bi trebalo da znaju pošiljaoci i primaoci, odnosno oni korisnici koji plaćaju prevoz robe. Prihvatamo sledeću notaciju, gde se formalno sa C (C je početno slovo engleske reči *Chain* – lanac), označeni su svi mogući transportni lanci, odnosno sve moguće varijantne kombinacije u funkciji prevoza robe od pošiljaoca do primaoca. Pretpostavka je da se radi o značajnim količinama robe koja se prevozi na različitim nosačima teretnih jedinica (kamionima, prikolicama i polu prikolicama, vagonima, brodovima), paletama, kontejnerima. U praksi, postoji veliki broj varijantnih kombinacija više transportnih lanaca koje treba uzeti u obzir da bi se realizovao prevoz uzimajući u obzir najbolju varijantu [4]. Sa C_1 označena je prva varijantna kombinacija od mogućih transportnih lanaca koje su formirane; Sa C_2 druga varijantna kombinacija i tako redom. U opštem slučaju ima M varijantnih kombinacija transportnih lanaca, pa je poslednji lanac označen sa C_m.

Ako je, sa C_1 označen prvi generisani transportni lanac koji sadrži konačan niz procesa i aktivnosti, i koji je logično manji od svih mogućih procesa i aktivnosti koji egzistiraju, primenjujući razne varijante formalno se može napisati u obliku: $C_1 = c_1, c_2, c_3, ..., c_n$

$c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ respektivno predstavljaju egzistenciju svih mogućih (elemenata) procesa i aktivnosti u varijantnim kombinacijama transportnih lanaca prevoza robe od pošiljaoca do primaoca. U višoj matematici vrednosti: $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ predstavljaju jedinične vektore.

Kod konkretnog transportnog lanca svi procesi i aktivnosti nisu potrebni (samo oni koji su dovoljni, odnosno samo jedna varijanta). Ako se utovara jednom dizalicom onda se logično, ne utovara istovremeno i drugom. Kako je potpun opis mogućih procesa i aktivnosti definisan sa $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ svi oni procesi, i aktivnosti u konkretnoj varijanti koji u jednoj varijanti nisu zastupljeni, njihove vrednosti se izjednačavaju sa nulom ($\mathbf{c_i = 0}$), a procesi i aktivnosti koji se pojavljuju u tom lancu obeležavaju se sa jedinicom.

Važno je primetiti da se kod formalnog obeležavanja svaki drugi transportni lanac obeležava kao i prvi, sa tim da ima drugi indeks. Osnovna razlika između njih je u rasporedu nula i jedinica. Ako se na takav način formiraju svi relevantni lanci, onda se potpun opis transportnih lanaca može predstaviti u obliku matrice. Obično grupe kolona generišu varijantne kombinacije i predstavljaju primenu različitih tehnologija kod pretovara na određenoj lokaciji ili pak predstavljaju različite režime prevoza (drumom, železnicom, vodom i dr.). Kod tehnologija u kopnenom transportu mogu se formirati posebne korespondentne matrice za četiri jasno izdvojene grupe, a to su grupa procesa i operacija kod pošiljaoca, grupa procesa i operacija na mestima pretovara drum-železnica, zatim pretovara železnica-drum i procesi i aktivnosti kod primaoca robe.

Svaka kolona kod matrice predstavlja neku relevantnu aktivnost ili proces, na primer, utovar jednim tipom dizalice. Druga kolona može da označava prevoz drumom, treća prevoz železnicom itd. Potpun opis transportnih lanaca formalno i konačno izgleda (Jednačina 2):

$$C = \boxed{\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_j \\ \vdots \\ C_m \end{matrix}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1i} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2i} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3i} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{j1} & C_{j2} & C_{j3} & \cdots & C_{ji} & \cdots & C_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & C_{m3} & \cdots & C_{mi} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vrste označavaju formirane varijante transportnih lanaca, gde prva kolona (koja je namerno uokvirena) $c_{11}, c_{21}, c_{31}, ..., c_{m1}$ kao i svaka druga kolona predstavlja relevantne aktivnosti ili procese u transportnim lancima, s tim što je sa: c_{11} – označena početna egzistencija procesa ili aktivnosti u prvom transportnom lancu. Ta vrednost će za prvi lanac biti nula ako se ne koristi neki tip dizalice naveden u prvoj koloni (ili 1 ako se koristi). Idući redom, c_{21} je početna egzistencija procesa ili aktivnosti u drugom transportnom lancu i tako redom, a druga kolona (ako je tako struktuirana) može predstavljati upotrebu auto-dizalice, treća upotrebu manipulatora, četvrta prevoz drumom itd. Kolone se često nazivaju i logistički procesi i aktivnosti. U onom transportnom lancu gde je vrednost nekog c_{ij} jednaka nuli znači da se u *j*-toj koloni ne pojavljuju ti procesi i aktivnosti (odnosno neki element strukture) za *i*-ti transportni lanac. Kako se kvantitativne vrednosti matrice *C* sastoje od nula i jedinica takva se matrica u daljem tekstu označava sa $C_{(1\text{-}0)}$. Za one procese i aktivnosti nekog *j*-toj transportnog lanca gde se nalaze nule, ti procesi i aktivnosti se ne podrazumevaju.

Značaj matrice (Jednačina 2) je mnogostruk. Prvo, ovako koncipirana matrica može se koristiti kod primene određenog softvera u izboru optimalnih transportnih lanaca, a drugo, kako je za neke prevoze broj kolona u funkciji transportnih lanaca konačan (nije značajno velik) nije teško i „ručno“ formirati matricu ovog tipa, pomoću koje je lako i brzo doći do broja mogućih transportnih lanaca i značajnih kalkulacija. Kod matrica, mogu se grupisati procesi i aktivnosti po mestu događaja (mesto manipulisanja, utovara, istovara, pretovara i sl.), tako se kod matrice $C_{(1\text{-}0)}$ mogu grupisati kolone ako nam vrste predstavljaju redosledom transportne lance i obrnuto. Matricu $C_{(1\text{-}0)}$ možemo množiti i sa leve i sa desne strane, u zavisnosti šta želimo da dobijemo kao konačan rezultat, kao i u zavisnosti od toga šta nam predstavljaju vrste, a šta kolone. Ako nam vrste kod matrice $C_{(1\text{-}0)}$ predstavljaju transportne lance, a kolone atribute procesa i operacija, onda takvu matricu najčešće množimo sa desne strane. Matricu $C_{(1\text{-}0)}$ najčešće množimo matricom jedne kolone. Ako nam takva matrica označava vremenske intervale prevoznog procesa, onda će kao rezultat biti matrica distribucije vremena utrošenog u prevozni proces po navedenim transportnim lancima, a ako su to troškovi onda kao rezultat imamo distribuciju troškova po pojedinim transportnim lancima i dr.

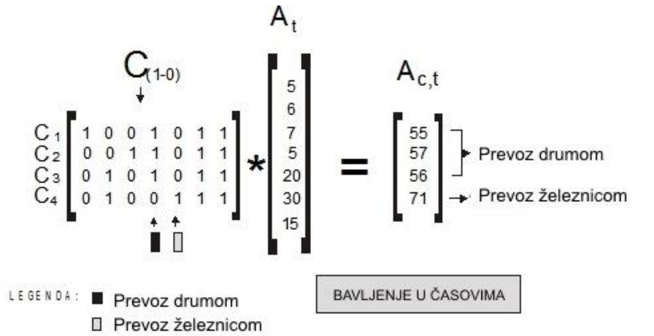
Pretpostavimo da smo formirali matricu $C_{(1\text{-}0)}$ za direktne tehnologije transporta (od pošiljaoca do primaoca drumom ili železnicom) i matricu A_t koja predstavlja troškove prevoza po fazama transportnog lanca ili vremenske intervale pojedinih procesa i aktivnosti, vezanih za izvršenje odgovarajućeg transportnog lanca. Množenjem matrice $C_{(1\text{-}0)}$ sa desne strane matricom At, dobijamo novu matricu označenu sa Ac. Formalno zapisano sledi (Jedančina 3, Slika 5):

$$A_c = C_{(1-0)} * A_t \quad (3)$$

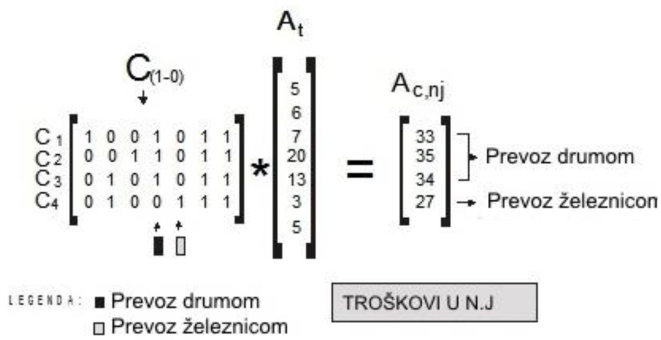
$$
\begin{array}{c}
\\
C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4
\end{array}
\overset{C_{(1-0)}}{\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}}
*
\overset{A_t}{\begin{bmatrix} t1\\ t2\\ t3\\ t4\\ t5\\ t6\\ t7 \end{bmatrix}}
=
\overset{A_c}{\begin{bmatrix} tc1\\ tc2\\ tc3\\ tc4 \end{bmatrix}}
$$

Slika 5. Matrični prikaz izbora transportnog lanca

Kolona jedan kod matrice $C_{(1-0)}$ označava upotrebu viljuškara, kolona dva dizalice, kolona tri manipulatora, kolona četiri prevoz drumom, kolona pet prevoz železnicom, a kolona šest označava upotrebu dizalice kod primaoca i kolona sedam zadržavanje na mestima primopredaje robe. Vrednosti u matrici At označavaju: t_1-troškove ili vreme upotrebe viljuškara; t_2-troškove ili vreme upotrebe dizalice i tako redom izražene u novčanim jedinicama ili satima. Množenjem ove dve matrice dobija se nova matrica Ac koja označava vrednosti varijanti transportnog lanca (C_1 -C_4) izražene u novčanim jedinicama ili u satima. Zamenom odgovarajućih vrednosti u matrici A_t sledi (Slika 6 i 7):



Slika 6. Matrični prikaz transportnog lanca u vremenu



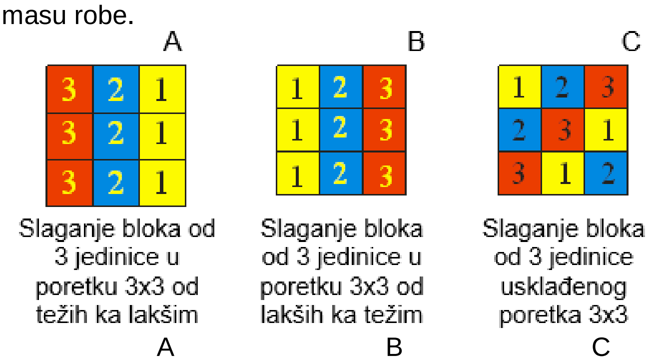
Slika 7. Matrični prikaz transportnog lanca u troškovima

Ako se analiziraju dobijene vrednosti u matricama At i An.j (po vremenu - t ili n.j.- novčanim jedinicama), može se uočiti da su varijante prevoza drumom po kriterijumu vremena povoljnije od prevoza železnicom, a da je varijanta prevoza železnicom po kriterijumu troškova povoljnija u odnosu na prevoze drumom.

U zavisnosti od toga koliko su precizno određene varijantne kombinacije matrice $C_{(1-0)}$, kao i vrednosti At, zavisi i konačan rezultat. U rešavanju zadatka ovakvog tipa značajno pomaže primena kompjutera uz primenu naznačenih softvera, koji u vrlo kratkom vremenu daju kombinacije i rešenja za značajno veliki broj kombinacija transportnih lanaca.

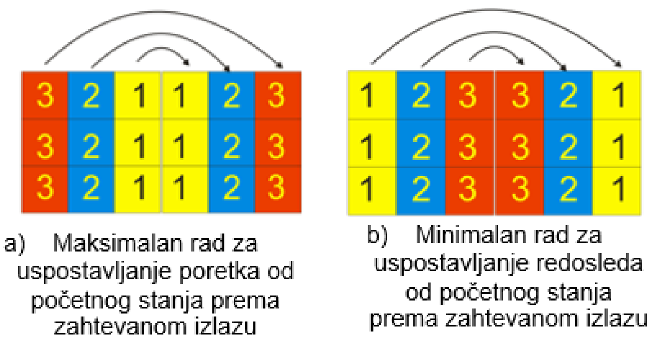
3.2. Slaganje tereta na nosače

Osnovni problemi u optimizaciji slaganja tereta (robe) na nosače je pojavni oblik po masi i dimenzijama pri slaganju i raspoređivanju tereta na nosače (vozila, palete, kontejnere, skladišne površine i dr.) na mestima početno-završnih operacija. Postoje nekoliko softvera kojima se određuje optimalan raspored slaganja komadnih tereta na nosače, kao što su: *Cube-IQ 4.0 Load Planning software*, *Cape Pack*, *Load Planner*, *Quick Pallet Maker* i dr., kojima se vrši slaganje tereta u 2D i 3D po nivoima (etažama), a zatim se računski određuje površinsko i zapreminsko iskorišćenje nosača po nosivosti, sa sve procentualnim iskorišćenjem nosača, prikazom neiskorišćenog prostora za jednu vrstu, ili različite jedinice tereta i dr. Ako se analizira tok teretnih jedinica (različitih masa), mogu se javiti različite kombinacije slaganja (Slika 8.), gde broj 1 označava najmanju, broj 2 srednju, a broj 3, najveću masu robe.



Slika 8. Primer 3x3 slaganja 3 vrste masa na 2D prostoru

Poseban slučaj je kada se teret raspoređuje po slobodnom izboru, gde postoji više varijanti. Poređenjem veličine uloženog rada koji je potrebno realizovati usled prevođenja početnog stanja u željeno, lako se može zaključiti da ekstremne razlike u izvršenom radu vizuelno izgledaju kao što je dato na Slici 9.



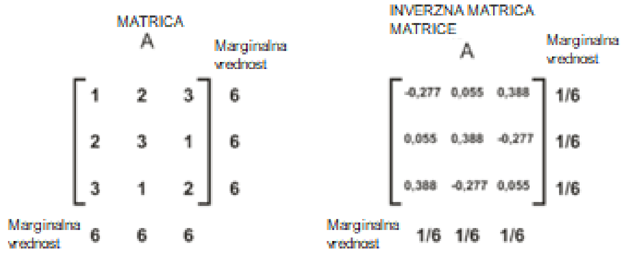
Slika 9. Vizuelni pregled uloženog rada transformacijom početnog stanja u zadani poredak na izlazu

U cilju kvantifikacije poslužimo se kriterijumom masa x rastojanje. Označimo mase respektivno sa oznakom q_i, i jedinično rastojanje sa (jedinični korak) do n-1 pređenih koraka, odnosno ćelija. Maksimalne i minimalne funkcije ciljeva određuju se prema Jednačini (3):

$$F_{max,min} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot [n - (2i - 1)]$$

(3)

Dakle, ako je q_i monotono opadajući niz pri početnom stanju i monotono rastući pri željenom izlazu, onda je to maksimalna funkcija cilja (maksimalan rad), a ako je monotono rastući pri početnom stanju i monotono opadajući kod željenog izlaza onda imamo minimalnu funkciju cilja. Očigledno je da se kod translacije sistema pri ovakvoj postavci javlja srednja vrednost funkcije cilja. Ostale varijante redosleda uloženog rada od početnog stanja do željenog na izlazu, nalaze se u navedenim intervalima i neophodno ih je redovno logistički podešavati. Ako želimo da ih složimo po visini ili masi, tako da blok slaganja bude usklađen na 2D prostoru (bez ponavljanja), onda je neophodno postupiti na sledeći način: Respektivno jedinice označimo sa brojevima 1,2,3, i posmatrajmo matricu (3x3) usklađenog slaganja. Brojevi (skalari) su složeni tako da zbir po kolonama i po vrstama bude jednak. Na taj način je dobijena regularna matrica koja se naziva usklađena, zbog svojstva jednakih marginalnih vrednosti (visine i mase) na 2D prostoru. Marginalne vrednosti kod matrice A iznose u konkretnom slučaju 6, a marginalne vrednosti njene inverzije daju recipročnu vrednost marginalnih vrednosti matrice A (Slika 10).



Slika 10. Matrica A i njena inverzna matrica sa marginalnim vrednostima

Dokazujemo da svaka usklađena regularna matrica tj. matrica jednakih marginalnih vrednosti kolona i vrsta, ima uravnoteženu inverznu matricu, čije su marginalne vrednosti jednake recipročnim marginalnim vrednostima originalne matrice [5].

Lema. Neka je e_1 = (1,0,…,0),…, e_n = (0,0,…,1) kanonska baza i $v = e_1 + \ldots + e_n$. Tada kvadratna matrica A reda n, ima da je zbir elemenata svake njene vrste jednak α ako i samo ako je $Av = \alpha v$, tj. ako je α sopstvena vrednost matrice A, a v odgovarajući sopstveni vektor.

Dokaz. Označimo sa "·" skalarni proizvod. Ako je $A = (a_{ij})$, onda $a_{ij} = Ae_j \cdot e_i$, pa je zbir elemenata i-te vrste (Jednačina 4):

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = e_i \cdot \sum_{j=1}^{n} Ae_j = e_i \cdot Av$$

(4)

S druge strane je $\alpha = \alpha v \cdot e_i$, pa iz gornje relacije sledi da za sve i važi (Jednačina 5):

$$e_i \cdot Av = e_i \cdot \alpha v$$

(5)

Odakle se zaključuje, da je $Av = \alpha v$. (Kraj dokaza leme.)

Teorema. Neka je A regularna matrica sa svojstvom da je zbir elemenata svake njene vrste jednak α, različito od nule, a matrica A^{-1} ima karakteristiku da je zbir elemenata svake njene vrste jednak α^{-1}.

Dokaz. Iz prethodne leme važi da je $Av = \alpha v$, pa množeći sa A^{-1} dobijamo $v = \alpha A^{-1} v$, odnosno $A^{-1} v = \alpha^{-1} v$. Na kraju, tvrdnja se dobija koristeći prethodnu jednakost i obrnut smer u lemi.

Navedeni dokazi značajno olakšavaju usklađenost (odnosno formiranje dodatnih jednačina) kada su na 2D površini fiksirani neki elementi, odnosno u određivanju broja zavisnih i nezavisnih promenjivih u procesu optimalnosti. Neophodno je napomenuti da u logistici postoje dve vrste optimalnosti masa (visina i nosivosti) na 2D prostoru i to blokovski načini slaganja i/ili slobodni načini slaganja. Ako sa x označimo broj blokova (kvadratna forma slaganja), a sa n broj različitih veličina jedinica, i sa M_{nxn} matricu koju treba uskladiti, onda blokovski način slaganja kvadratne matrice u cilju optimalnosti podrazumeva $x = n^{1/2}$ blokova po vrsti, i $x = n^{1/2}$ blokova po koloni (gde su koreni prirodni brojevi veći od 2), čime je broj blokova u matrici jednak broju različitih jedinica. Dakle, kvadratna matrica $M_{n \times n}$ ima n^2 ćelija, n različitih slojeva (vrsta i kolona) i $x^2 = n$ blokova. Broj blokova i različitih jedinica u matrici respektivno iznosi: 4, 9, 16, ... ili x^2. U cilju analize u statičkom i dinamičkom smislu, jedan blokovski i jedan slobodan način slaganja prilikom optimalnosti, prikazan je na Slici 11.

9	6	8	7	1	4	5	3	2
5	2	4	8	3	6	1	7	9
1	3	7	2	5	9	6	4	8
3	4	5	1	2	8	7	9	6
6	7	1	9	4	3	2	8	5
2	8	9	6	7	5	4	1	3
4	9	2	3	6	7	8	5	1
8	5	6	4	9	1	3	2	7
7	1	3	5	8	2	9	6	4

a) Usklađeno"blok" slaganje po principu sudoku slagalice

1	2	3	7	8	9	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	1	2	3	7	8	9
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	4	5	6	1	2	3
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

b) Usklađeno slobodno slaganje

Slika 11. Dva tipa optimalnosti matrice 9x9

Veličine su usklađene posmatrajući marginalne zbirove regularnim matricama, njihove inverzne matrice su prikazane na Slici 12 (a i b).

Primećuje se da su zbirovi inverznih veličina raspoređeni tako da su kod blokovskog slaganja zbirovi inverznih veličina međusobno jednaki, a takođe su jednaki recipročnoj vrednosti marginalnih vrednosti inverzne matrice (1/45), mada ne za svaku blok-složenu matricu. Dakle, kod blok slaganja, u cilju optimalnosti, zbir vrednosti po blokovima jednak je zbiru marginalnih vrednosti matrice, što za slobodno slaganje u cilju optimalnosti nije slučaj.

0,043	0,189	-0,177	0,021	-0,198	-0,056	0,136	0,089	-0,025
0,042	-0,254	0,191	-0,034	0,247	-0,063	-0,054	0,033	-0,086
-0,008	0,075	-0,177	0,149	-0,133	0,158	-0,063	0,011	0,010
0,045	-0,048	0,133	-0,139	0,137	0,007	-0,061	-0,108	0,057
-0,144	0,273	-0,300	0,069	-0,267	0,148	0,145	0,057	0,042
-0,037	0,367	-0,213	0,002	-0,330	0,037	0,248	-0,013	-0,040
0,115	-0,398	0,429	-0,145	0,332	-0,153	-0,153	-0,079	0,075
-0,107	0,171	-0,333	0,243	-0,139	0,145	0,012	0,001	0,029
0,074	-0,353	0,469	-0,144	0,373	-0,202	-0,187	0,032	-0,040

a) Inverzna matrica originalne matrice a

-0,072	0,002	0,002	-0,072	0,002	0,002	0,040	0,002	0,114	0,022
0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,114	-0,109	0,022
-0,035	0,002	0,002	0,077	0,002	0,002	0,077	-0,109	0,002	0,022
0,040	0,002	0,002	-0,072	0,002	0,114	-0,072	0,002	0,002	0,022
0,002	0,002	0,002	0,002	0,114	-0,109	0,002	0,002	0,002	0,022
0,077	0,002	0,002	-0,035	-0,109	0,002	0,077	0,002	0,002	0,022
-0,072	0,002	0,114	0,040	0,002	0,002	-0,072	0,002	0,002	0,022
0,002	0,114	-0,109	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,022
0,077	-0,109	0,002	0,077	0,002	0,002	-0,035	0,002	0,002	0,022
0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	

B) Inverzna matrica originalne matrice B

Slika 12. Inverzne matrice matrica a) i b)

4. Zaključak

Nakon uvoda, date su osnovne teorijske postavke rada sa realnim matricama, operacije i osnovna svojstva matrica. Ukazano je na primenu kompjutera kao alata za rešavanje matrica, na softverske i druge alate, dok su za Matlab i Matcad date neke osnovne funkcije tih softvera i njihova primena u rešavanja matrica. U narednom poglavlju, obrađena su dva konkretna primera iz prakse, i pokazano je kako vršiti izbor optimalnog transportnog lanca u lancu distribucije, kao i kako optimalno slagati robu (teret) na nosače. U prvom slučaju, pokazano je da su dobijene vrednosti u matricama *At* i *An.j* (po vremenu - t ili n.j.- novčanim jedinicama) varijante prevoza drumom po kriterijumu vremena povoljnije od prevoza železnicom, a da je varijanta prevoza železnicom po kriterijumu troškova povoljnija u odnosu na prevoz drumom, što je bitno sa aspekta korisnika prevoza. U drugom slučaju formirana je funkcija cilja, zahtevana je njena minimalna vrednost i pokazano je da se kod blok-slaganja, u cilju optimalnosti, zbir vrednosti po blokovima jednak zbiru marginalnih vrednosti matrice, što za slobodno slaganje u cilju optimalnosti nije slučaj. Matrični račun je veoma važan za grafičko modeliranje u tehnici jer su mnoge metode matematičkog programiranja zasnovane na matričnoj algebri, gde se elementi matrice mogu pored brojeva prikazati kao matematički izrazi, sintakse, stringovi a ponekad i komande. U tom smislu, u budućim istraživanjima, pojave u saobraćaju i transportu treba optimizovati raznim matematičkim modelima jer podaci dobijeni merenjima, samo su aproksimacija pravih vrednosti merne veličine, zbog čega je neophodno, prilikom korišćenja podataka, na neki način uzeti u obzir nepreciznost merenja.

Literatura

[1] Milovanović, V. G., & Đorđević Ž. R. (2004). *Linearna algebra*. Izdavačka jedinica Univerziteta u Nišu.

[2] Erić, M. (2017). *Razni koncepti pozitivnosti matrica*. Master rad. Izdavačka jedinica Univerziteta u Novom Sadu.

[3] Letić, D., Davidović, B., Berković, I., & Petrov, T. (2007). Mathcad 13 u matematici i vizuelizaciji. *Kompjuter biblioteka, Beograd*.

[4] Davidović, B. (2008). *Tehnologije kombinvanog transporta*. Intelekt, Beograd.

[5] Kočinac, L. (1991). *Linearna algebra i analitička geometrija*. Izdavačka jedinica Univerziteta u Nišu.

Application of matrices in transportation

Dragan Radovanović, Dipl.eng.mechanical
Elementary school “Vuk Karadžić”, Sočanica, Republic of Serbia

Abstract: The action of linear operators can be represented in a matrix. Therefore, it is best to write a system of equations with many unknowns in matrix form. In the following text, the basic operations with matrices are listed, the existing computer tools for operations with matrices are pointed out, and finally, some practical problems from transportation that can be solved with matrices are mentioned. Based on a technology-economic analysis, the best variants of transportation chains are created, which should be known to shippers and receivers. The number of combinations can be important, and matrices can be used to determine the cheapest variants. The basic problems in optimizing the stacking of unit loads (goods) on carriers are the occurrence and mass at the locations of the initial and final operations, which in most cases are of stochastic size and load distribution in terms of time and dynamics.

Keywords: Matrices, Transportation chain, Cargo stacking, Choice of variations